Παραμετρικοποίηση

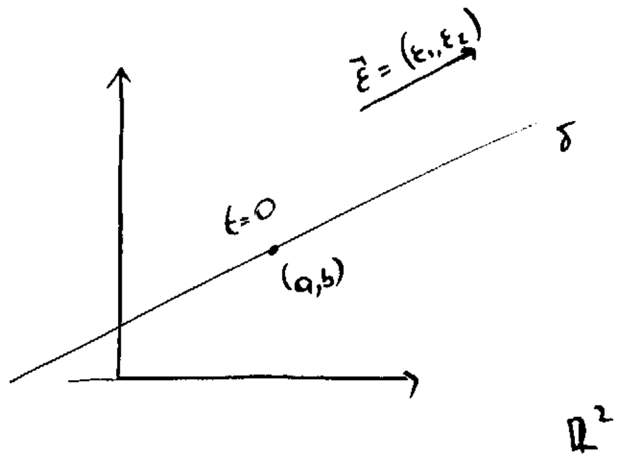
Είναι μία μέθοδος αναπαράστασης καμπυλών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ ή του χώρου $\mathbb{R}^3$ ή του $\mathbb{R}^n$ ..., η οποία περιγράφει την κίνηση ενός κινητού που έχει τροχιά την καμπύλη.

Αν $x : [a,b] \to \mathbb{R}$

$y : [a,b] \to \mathbb{R}$

τότε $\vec{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$

Άσκηση



Να βρεθεί την παραμετρικοποίηση της ευθείας (δ) που διέρχεται από το σημείο (a,b) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

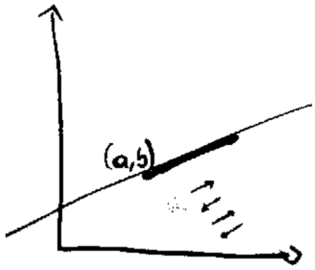
Λύση

$y = \lambda x + 6$

Είναι $y(t) = \lambda \cdot x(t) + 6 \quad (1)$: έχω αναζητώ τα $x(t)$, $y(t)$

Δεν καλύπτομαι όμως μόνο εάν τα $x(t)$, $y(t)$ επαληθεύουν την (1) γιατί μπορεί να μην καλύπτουν όλο το εύρος της ευθείας, μπορεί να ισχύει μόνο τμηματικά.

Δηλαδή να ισχύει :



δεν είναι για όλη την ευθεία, μόνο για το πράσινο τμήμα.

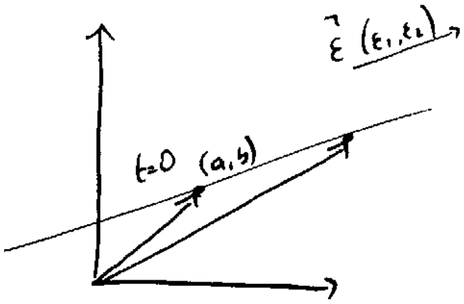
Άρα χρειάζεται επιπλέον το σύνολο τιμών του $x(t)$ να είναι όλο το $\mathbb{R}$

π.χ. $x(t) = t$ (όλα τα περιττά κάνουν $x(t) = t^3, t^5 ..$
Όχι τα θετικά, γιατί αποκλείω έτσι την περίπτωση το $x(t)$ να είναι αρνητικό)

Έστω
$$x(t) = t$$
$$y(t) = \lambda \cdot t + b$$

$\Longleftrightarrow$

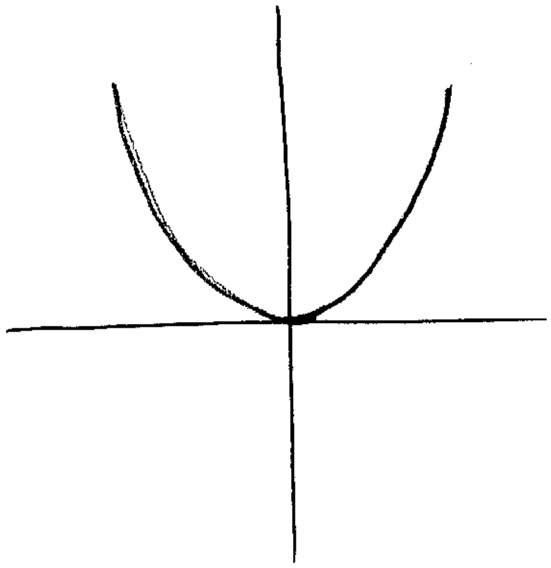
ή Σκέφτομαι : Να βρω την κίνηση ενός κινητού που η ταχύτητά του είναι ε, σε χρόνο μηδέν είναι στο (a,b), κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



$$\vec{x}(t) = (a,b) + t\cdot\vec{u}$$
$$= (a,b) + t\cdot(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$
$$= (\underbrace{a + t\cdot\varepsilon_1}_{x(t)},\ \underbrace{b + t\cdot\varepsilon_2}_{y(t)})$$

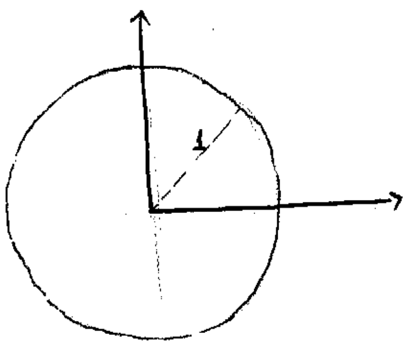
Άρα
$$x(t) = a + t\cdot\varepsilon_1$$
$$y(t) = b + t\cdot\varepsilon_2$$

Παράδειγμα:



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = t \end{array}\right\} \Rightarrow y = t^2 : \text{παραμετρι-κοποίηση}$$

Παραμετρικοποίηση κύκλου



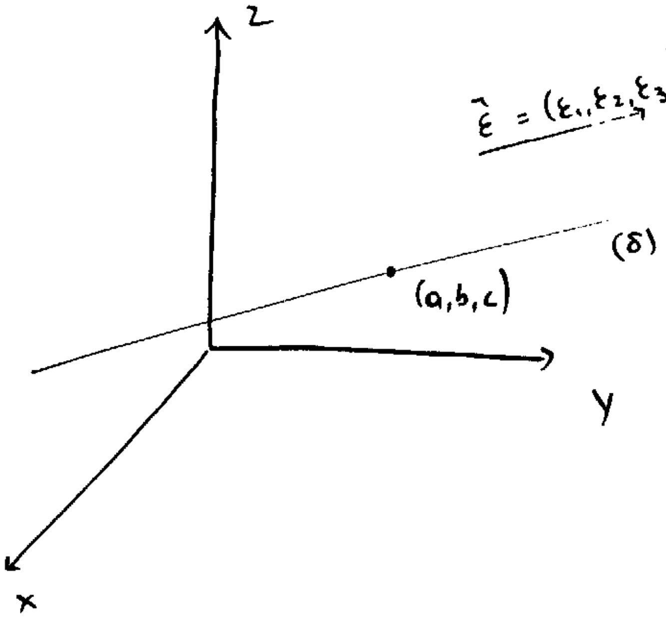
$x^2 + y^2 = 1$

Είναι $x(t) = συν\, t$
$y(t) = ημ\, t$

(γωνιακή ταχύτητα σταθερή και ίση με 1)

- Το κινητό που θα γυρίσει όλο τον κύκλο; Ναι

Άσκηση



Να βρεθεί την παραμετρικοποίηση της ευθείας δ που διέρχεται από το (a,b,c) και είναι παράλληλη στην $\vec{\varepsilon}$ στο $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Ξεκινάει από το (a,b,c) και σε χρόνο t διανύει το $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{x}(t) = (a,b,c) + t \cdot \vec{u} \qquad \vec{u} = \vec{\varepsilon}$$

$$= (a,b,c) + t\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$= (\underbrace{a + t\cdot\varepsilon_1}_{x(t)}, \quad \underbrace{b + t\cdot\varepsilon_2}_{y(t)}, \quad \underbrace{c + t\cdot\varepsilon_3}_{z(t)})$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (a + t\cdot\varepsilon_1) \\ y(t) &= (b + t\cdot\varepsilon_2) \\ z(t) &= (c + t\cdot\varepsilon_3) \end{aligned}\right\} \quad \text{οι συντεταγμένες του } \vec{x}(t)$$

Παρατήρηση: Για να παραμετρικοποιήσω μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ χρειάζεται ένα σημείο $P(x_0, y_0)$ απ' το οποίο διέρχεται η ευθεία, και πρέπει να ξέρω και ένα διάστημα $\vec{a}\,(a_1, a_2)$ στο οποίο η ευθεία να είναι παράλληλη.

(*) Θέλω να βρω την ταχύτητα του $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ τη χρονική στιγμή t_0.

Είναι $\vec{u}(t_0) = \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}(t_0)$

$$= \left(\frac{dx(t)}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0) \right) \quad (1)$$

Ορίζουμε την ταχύτητα (στο t_0) σαν:

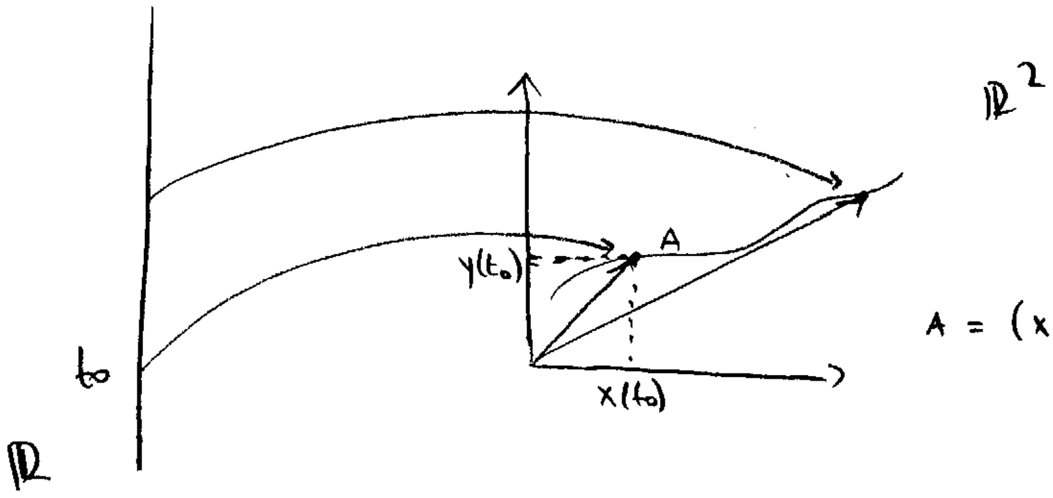
$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim \left(x(t) - x(t_0), \; y(t) - y(t_0), \; z(t) - z(t_0) \right) =$$

Εφαπτομένη

Σε μια καμπύλη παραμετρικοποιημένη, για να βρω την εφαπτομένη: παραγωγίζω.

C : $\vec{x} = \vec{x}(t)$ παραμετρικοποιημένη καμπύλη



$A = (x(t_0), y(t_0))$

$$C : \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}$$
$$= x(t)\,(1,0) + y(t)\,(0,1)$$
$$= (x(t), y(t))$$

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \left(\frac{d\,x(t)}{dt}, \frac{d\,y(t)}{dt}\right)$$

$\vec{u}(t)$

βρίσκω ένα διάνυσμα πάνω στην ευθεία για να βρω την ίδια την ευθεία:

$$(\varepsilon) : \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t) = (x(t_0), y(t_0)) + t\cdot\vec{u}(t_0)$$

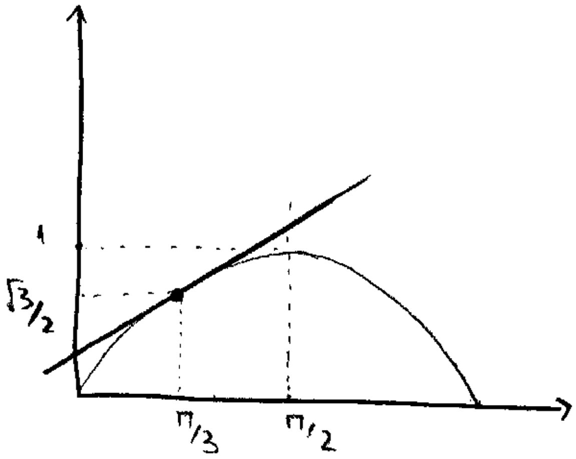
Αν $\vec{u}(t_0) = (u_1, u_2)$ τότε

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t) = (x(t_0) + t\cdot u_1,\ y(t_0) + t\cdot u_2)$$

Παραγωγίζω την $\vec{\varepsilon}$ ως προς t και μένει (u_1, u_2)

Άσκηση

Θεωρούμε την καμπύλη με εξίσωση $y = \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και θέλουμε να βρούμε την εφαπτομένη της στο $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Παραμετρικοποιώ : • Εμφανίζω t : $x = x(t) = t$, $y = y(t) = \eta\mu t$

με $t \in [0, \pi]$

• παραγωγίζω x, y : $\vec{u}(t) = \left((t)' , (\eta\mu t)' \right)$

$= (1, \sigma\upsilon\nu t)$

$\vec{u}(\pi/3) = (1, \sigma\upsilon\nu \pi/3) = (1, 1/2)$

• εξίσωση ευθείας : $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t) = \left(\pi/3, \sqrt{3}/2\right) + t(1, 1/2)$

$= \left(\pi/3 + t, \sqrt{3}/2 + t/2\right)$

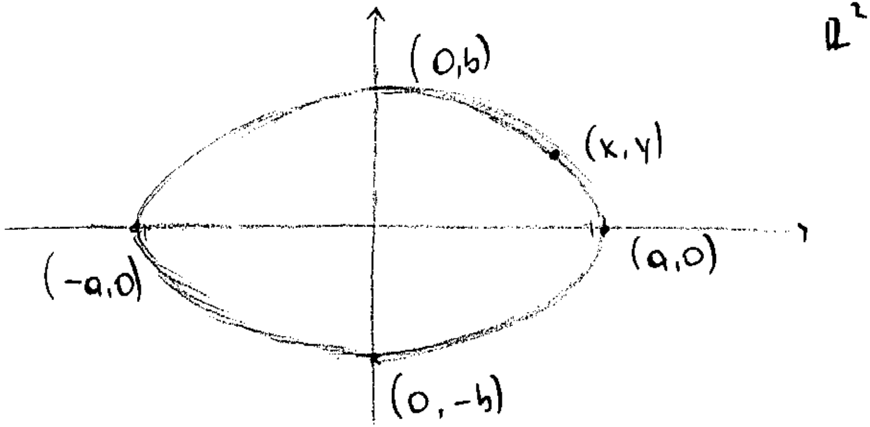
$y = a \cdot x + b$

Είναι : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} + t \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = x - \frac{\pi}{3}$

Αρα $$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x - \frac{\pi}{3}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Γενική άσκηση



Είναι x^2 y^2

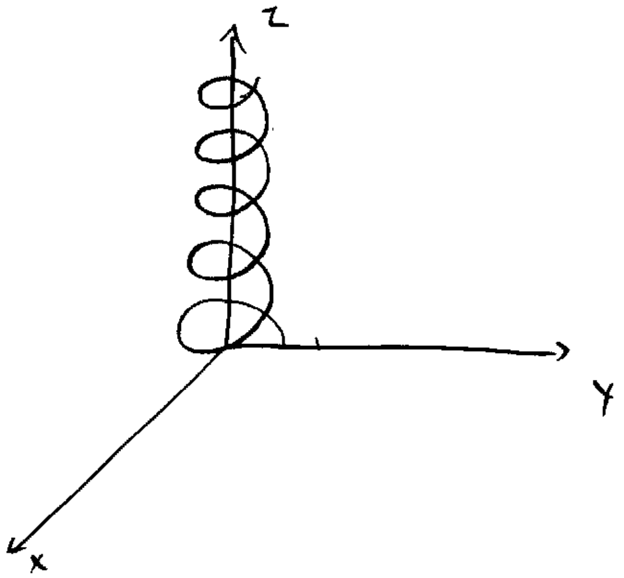
$$x(t) = a \cdot \eta\mu t$$
$$y(t) = b \cdot \sigma\upsilon\nu t$$

$$u(t) = (a \cdot \eta\mu t\,,\ b \cdot \sigma\upsilon\nu t)$$

οπότε για το t_0 για το οποίο $x_0 = a \cdot \sigma\upsilon\nu t_0$, $y_0 = b \cdot \eta\mu t_0$

είναι : $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t) = (a \cdot \sigma\upsilon\nu t_0 + t \cdot a \eta\mu t_0\,,\ b \cdot \eta\mu t_0 + t \cdot b \cdot \sigma\upsilon\nu t_0)$

Παράδειγμα για $\mathbb{R}^3$



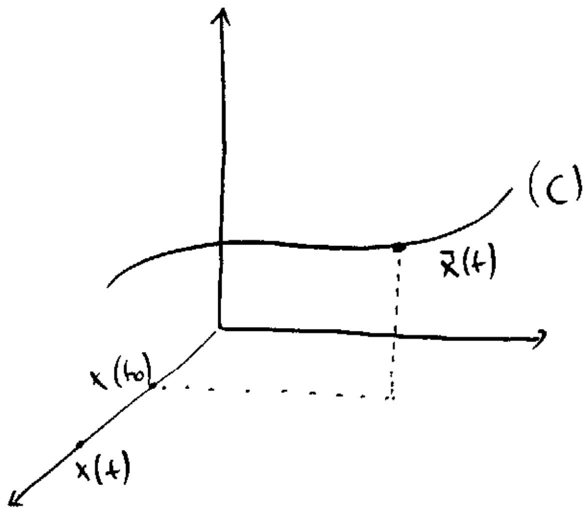
Αν η σπείρα έχει ακτίνα $r > 0$ τότε στο επίπεδο xOy θα διαγράφεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = r^2$ δηλαδή παραμετρικοποιημένος

$$\left.\begin{array}{ll} x = r \cdot \sigma\upsilon\nu t & (1) \\ y = r \cdot \eta\mu t & (2) \\ z = a \cdot t\ ,\ a > 0 & (3) \end{array}\right\}$$

Με μια εξίσωση δεν μπορώ να περιγράψω την σπείρα αλλά με δύο μπορώ (στον $\mathbb{R}^3$). Από (1),(2),(3) λύνω ως προς t ανά 2 ωστε να το απαλείψω:

$$\left.\begin{array}{l} t = f_1(x) \\ t = f_2(y) \\ t = f_3(z) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f_1(x) = f_2(y) \\ f_1(x) = f_3(z) \end{array}$$

Επιπλέον παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3$



$$C: \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{u}(t_0) = (u_x(t_0), u_y(t_0), u_z(t_0))$$

$$u_x(t_0) = x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$u_y(t_0) = y'(t_0)$$

$$u_z(t_0) = z'(t_0)$$

Άρα $\vec{u}(t_0) = (u_x(t_0), u_y(t_0), u_z(t_0))$

Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε 2 διαφορετικά σημεία A, B. Θέλουμε να βρούμε μία παραμετρική εξίσωση της ευθείας AB. Αν το X ανήκει σ' αυτήν την ευθεία τότε τα διανύσματα $\vec{AX}$ και $\vec{AB}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και $\vec{AB} \neq \vec{0}$. Έπεται ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\vec{AX} = \lambda \cdot \vec{AB} \qquad (1)$$

- $\vec{AX} = X - A$
- $\vec{AB} = B - A$

Είναι : (1) $\Leftrightarrow$

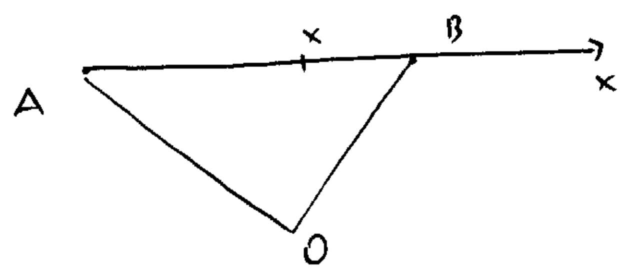
$$X - A = \lambda(B - A) \Leftrightarrow$$
$$X - A = \lambda B - \lambda \cdot A \Leftrightarrow$$
$$X = \lambda \cdot B - \lambda \cdot A + A$$
$$X = (1-\lambda)A + \lambda \cdot B \quad (2)$$

Ισχύει και αντίστροφα άρα η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (2).

Η (2) γράφεται ισοδύναμα

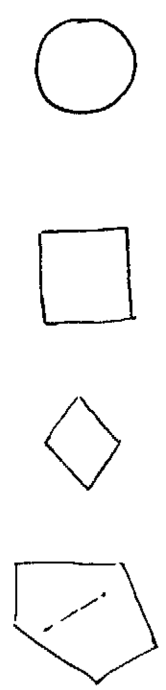
$$\vec{OX} = (1-\lambda)\vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB}$$

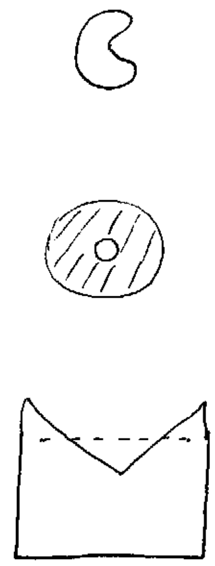
Από τη (2) όταν $0 \leq \lambda \leq 1$ τότε X βρίσκεται μεταξύ A και B.



- Αν $\lambda \geq 1$: τότε το X βρίσκεται προς τη μεριά του B
- Αν $\lambda \leq 0$: το X βρίσκεται προς τη μεριά του A

ΚΥΡΤΑ	ΜΗ ΚΥΡΤΑ





Κυρτό: αν πάρω 2 σημεία, η ευθεία που σχηματίζεται ανήκει ολόκληρη μέσα στο σχήμα.

Ορισμός: Ένα $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall A, B \in \Sigma$:

$$\{(1-\lambda)A + \lambda B \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \subseteq \Sigma.$$

Θεώρημα

Αν $M \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει το ελάχιστο κυρτό $K(M)$ το οποίο περιέχει το M. Δηλαδή υπάρχει $K(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε:

i) $M \subseteq K(M)$

ii) $K(M)$ κυρτό

iii) Αν K' κυρτό και $K' \supseteq M$ τότε $K' \supseteq K(M)$

Απόδειξη

Θεωρώ την εξής οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{ L \subseteq \mathbb{R}^n : L \text{ κυρτό και } M \subseteq L \}$$

[Σημείωση: $\mathcal{A}$: οικογένεια συνόλων
$\cap \mathcal{A} = \{ x : x \in K \ \ \forall K \in \mathcal{A} \} = \cap K$]

→ Ισχυρισμός: $\cap \mathcal{A}$ είναι κυρτό και περιέχει το M.

Αν αποδείξουμε τον ισχυρισμό τότε τελειώσαμε γιατί για $K(M) = \cap \mathcal{A}$ το $K(M)$ είναι κυρτό και περιέχει το M απ' τον ισχυρισμό και αν K' κυρτό και περιέχει το M τότε $K' \in \mathcal{A}$ οπότε

$$K' \supseteq \cap \mathcal{A} = K(M)$$

Απόδειξη Ισχυρισμού

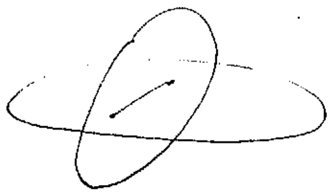
Έστω $A, B \in \bigcap \mathcal{A}$

Πρέπει να αποδείξω ότι:

$$AB = \{(1-\lambda)A + \lambda B,\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$$

Για κάθε $L \in \mathcal{A}$, $A, B \in L$ και επειδή το L είναι κυρτό, $AB \subseteq L$

- $\forall\, L \in \mathcal{A} : \quad AB \subseteq L \rightarrow AB \subseteq \bigcap \mathcal{A}$



Για κάθε $L \in \mathcal{A}$ ξέρω ότι $M \subseteq L$ άρα $M \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

Πρόταση

Αν το M είναι πεπερασμένο:

$$M = \{x_0 \dots x_k\} \quad \text{τότε}$$

$$K(M) = \{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i = 0 \dots k \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \}$$

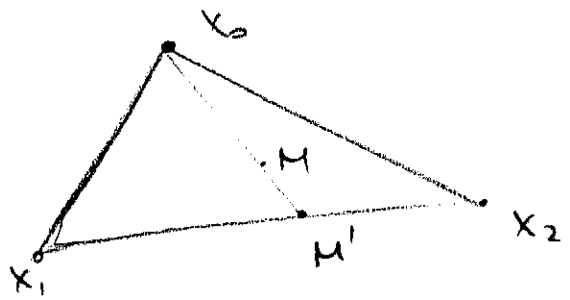
$$M = \{x_0 = A, \ x_1 = B\}$$

$$K(M) = AB = \{ \lambda A + (1-\lambda) B \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

$$= \{ \lambda_0 A + \lambda_1 B \qquad \lambda_0 \lambda_1 \geq 0 \ , \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1 \}$$

$$= \{ \sum_{i=0}^{1} \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 0,1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^{1} \lambda_i = 1 \}$$

Παρένθεση



$$\{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ : \quad 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \quad \text{και} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \}$$

M τυχαίο σημείο του τριγώνου τότε $M' \in x_1 x_2$ τέτοιο

ώστε $M \in x_0 M$

Άρα $M = \mu_0 \cdot x_0 + \mu_1 \cdot M'$ $\quad \mu_0 \mu_1 \geq 0$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$

Επειδή $M' \in x_1 x_2 \ \exists \ \lambda_1, \lambda_2$ τέτοια ώστε

$$M' = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ , \quad 0 \leq \lambda_1 \lambda_2 \ , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Άρα $M = \mu_0 \cdot x_0 + \mu_1 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$

$= \mu_0 \cdot x_0 + \mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot x + \mu_1 \lambda_2 x_2$

$\rightarrow \mu_0, \mu \lambda_1, \mu_1 \lambda_2 \geq 0$

άρα $\mu_0 + \mu_1 \lambda_1 + \mu_1 \lambda_2 = \mu_0 + \mu_1 (\underbrace{\lambda_2 + \lambda_1}_{1}) = \mu_0 + \mu_1 = 1$

Επεξηγηματική παρένθεση:

$A, B \in \mathbb{R}^n$

$\{ \lambda A + (1-\lambda) B \ : \ 0 \leq \lambda \leq 1 \} =$

$\{ \lambda_0 A + \lambda_1 B \ : \ 0 \leq \lambda_0 \lambda_1 \leq 1$ και $\lambda_0 + \lambda_1 = 1 \}$

- $\lambda_0 = \lambda$ και $\lambda_1 = 1 - \lambda \geq 0$: $\lambda_0 + \lambda_1 = \lambda + 1 - \lambda = .$

$\lambda_0 \cdot A + \lambda_1 \cdot B$ $\quad \lambda = \lambda_0 \quad \lambda = 1 - \lambda_0 = 1 -$

$\lambda A + (1-\lambda) B$ $\quad \lambda \geq 0$ και $1 - \lambda = \lambda_1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda \leq 1.$

18/12

ΚΑΜΠΥΛΕΣ BEZIER

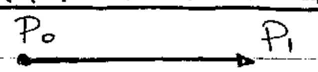
Έστω 2 σημεία $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots$

Μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε την κίνηση ενός κινητού που ξεκινά από το σημείο P_0 σε χρόνο 0 φτάνει στο σημείο P_1 σε χρόνο 1 και κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Το κινητό θα κινηθεί στην ευθεία P_0P_1 και μια παραμετρικοποίηση της ευθείας είναι η

$f: t \mapsto (1-t)P_0 + tP_1$

$f'(t) = -P_0 + P_1$



Η παραπάνω είναι η καμπύλη Bezier δύο σημείων P_0P_1 (δηλ. το ευθύγραμμο τμήμα P_0P_1) και συμβολίζεται

$B_{P_0P_1}$

Έστω ότι τα P_0P_1 είναι μεταβλητά στον χρόνο

$f: A \to \mathbb{R}$

$f: x \mapsto x^2$

Ψάχνουμε πάλι να εκφράσουμε την κίνηση ενός κινητού που σε χρόνο 0 βρίσκεται στο P_0, σε χρόνο 1 βρίσκεται στο P_1 και σε ίσους χρόνους κάνει τα ίδια μέρη της διαδρομής από το P_0 στο P_1 και παρατηρούμε ότι η εξίσωση που πληροί τα παραπάνω είναι η

$$P_0 + t(\overrightarrow{P_0P_1}) = P_0 + t\cdot(P_1 - P_0) = (1-t)\cdot P_0 + t\cdot P_1$$

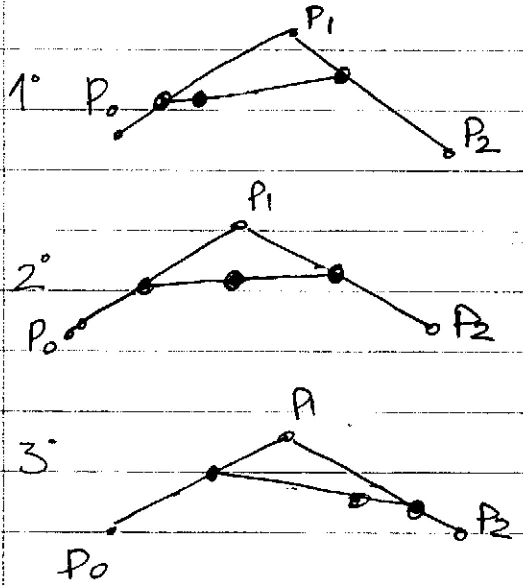
Την κίνηση αυτή θα τη λέμε σχετικά (με τα P_0, P_1) ευθύγραμμα ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\overrightarrow{P_0P_1}$

ΚΑΜΠΥΛΗ BEZIER 3 ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω η καμπύλη Bezier P_0, P_1, P_2

$B_{P_0P_1}(t) = (1-t)\cdot P_0 + t\cdot P_1$

$B_{P_1P_2}(t) = (1-t)\cdot P_1 + t\cdot P_2$



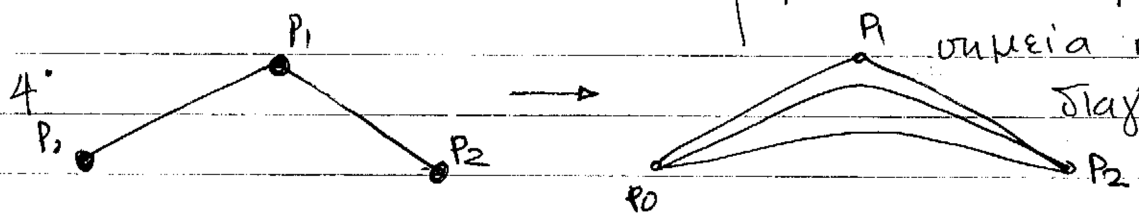
1° στιγμιότυπο: $t = 1/4$

2° στιγμιότυπο: $t = 1/2$

3° στιγμιότυπο: $t = 3/4$

4° στιγμιότυπο: $t = 1$

αποτέλεσμα η καμπύλη που αποτελείται από τα σημεία που διαγράφει



Η σχετική ευθύγραμμη ομαλή μεταξύ των $B_{P_0P_1}(t)$ και $B_{P_1P_2}(t)$ είναι η καμπύλη Bezier των τριών σημείων P_0, P_1, P_2 δηλαδή

$$\begin{aligned}
B_{P_0P_1P_2}(t) &= (1-t)\cdot B_{P_0P_1}(t) + t\cdot B_{P_1P_2}(t)\\
&= (1-t)\cdot\big((1-t)\cdot P_0 + t\cdot P_1\big) + t\cdot\big((1-t)\cdot P_1 + t\cdot P_2\big)\\
&= (1-t)^2\cdot P_0 + 2\cdot t(1-t)\cdot P_1 + t^2\cdot P_2\\
&= (2t(1-t), 0, t^2) \quad (1)
\end{aligned}$$

$P_0 = (0,0,0) \quad P_1 = (1,0,0) \quad P_2 = (0,0,1)$

$(1) \Longrightarrow (1-t^2)\cdot(0,0,0) + 2t(1-t)\cdot(1,0,0) + t^2\cdot(0,0,1) =$

$= (0,0,0) + (2t(1-t),0,0) + (0,0,t^2) = (2t(1-t),0,t^2)$

$B_{P_0P_1}(t) = (1-t)\cdot P_0 + t\cdot P_1$
$B_{P_1P_2}(t) = (1-t)\, P_1 + t\cdot P_2$

Ο αναδρομικός τύπος: Πως ορίζουμε και πως υπολογίζουμε καμπύλες Bezier $n+1$ σημείων από καμπύλες Bezier n σημείων

Εστω τα σημεία $P_0, P_1, \dots, P_n$ ($n+1$ σημεία)
Αν υποθέσουμε ότι ξέρουμε τις καμπύλες Bezier n σημείων είναι γνωστές οι
$B_{P_0P_1\dots P_{n-1}}(t)$ (Η καμπύλη Bezier των n πρώτων)
$B_{P_1\dots P_n}(t)$ (Η καμπύλη Bezier των n τελευταίων)

Η καμπύλη Bezier των $n+1$ σημείων $P_0, P_1, \dots P_n$ είναι η σχετική ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μεταξύ της καμπύλης Bezier των n πρώτων σημείων $B_{P_0\dots P_{n-1}}(t)$ και της καμπύλης των n τελευταίων $B_{P_1\dots P_n}(t)$ δηλ.
$B_{P_0\dots P_n}(t) = (1-t)\cdot B_{P_0\dots P_{n-1}}(t) + t\cdot B_{P_1\dots P_n}(t)$

πχ. Υπολογίζουμε την καμπύλη Bezier των P_0, P_1, P_2, P_3

$$B_{P_0P_1P_2P_3}(t) = (1-t)\, B_{P_0P_1P_2}(t) + t\cdot B_{P_1P_2P_3}(t) =$$
$$= (1-t)\cdot\big((1-t)\cdot B_{P_0P_1}(t) + t\cdot B_{P_1P_2}(t)\big) +$$
$$+ t\big((1-t)\cdot B_{P_1P_2}(t) + t\cdot B_{P_2P_3}(t)\big) =$$
$$= (1-t)\cdot\big((1-t)\ \dots\big) =$$
$$= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2\cdot t\, P_1 + 3(1-t)\cdot t^2\cdot P_2 + t^3 P_3$$
$$B_{P_0P_1P_2P_3}(t) = ((1-t)+t)^3$$

$$B_{P_0P_1P_2}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t\, P_1 + t^2 P_2$$
$$((1-t)+t)^2 = (1-t)^2 + 2\cdot(1-t)\cdot t + t^2$$

ΓΕΝΙΚΑ

$$B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t) = \binom{n}{0}(1-t)^n \cdot P_0 + \binom{n}{1} \cdot (1-t)^{n-1} t \cdot P_1 + \binom{n}{2} \cdot (1-t)^{n-2} \cdot t^2 \cdot P_2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot (1-t)^0 \cdot t^n \cdot P_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} \cdot t^k \cdot P_k \quad (1)$$

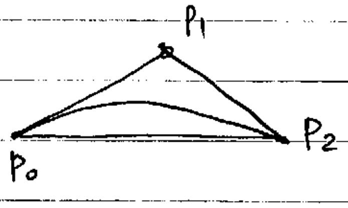
Θετω λ_k να είναι ο συντελεστής του P_k στην (1) δηλ $\lambda_k = \binom{n}{k} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot t^k \geq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = (a+b)^n = (1-t+t)^n = 1^n = 1$$

* Θυμόμαστε ότι η κυρτή θήκη των $P_0, \dots, P_n$ (δηλ το ελάχιστο κυρτό που περιέχει τα $P_0, \dots, P_n$) περιγράφεται

$$K(P_0, \dots, P_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P_k : \lambda_k \geq 0, \ k = 0, \dots, n \ \& \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1 \right\}$$

Αρα $\forall t \quad B_{P_0 \dots P_n}(t) \in K(P_0, \dots, P_n)$



Απο τον γενικό τύπο

$$\boxed{B_{P_0, \dots, P_n}(t) = \sum_{k=0} \binom{n}{k} \cdot (1-t)^{n-k} t^k \cdot P_k}$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t:

$$B'_{P_0, \dots, P_n}(t) = \left[(1-t)^n \cdot P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot t^k \cdot P_k + t^n P_n \right]' =$$

$$= n(1-t)^{n-1}\cdot P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} -\binom{n}{k}(n-k)\cdot(1-t)^{n-k-1}\cdot t^k\cdot P_k$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot(1-t)^{n-k}\, k\cdot t^{k-1}\cdot P_k + n\, t^{n-1}\cdot P_n$$

για $t=0$

$B'_{P_0,\dots P_n}(0) = -nP_0 + \binom{n}{1}P_1 = -P_0 + P_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$

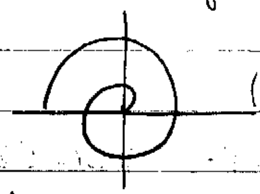
Ομοίως $t=1$

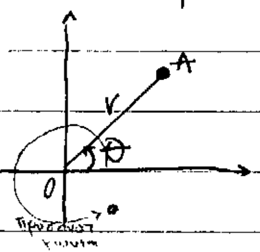
$B'_{P_0,\dots P_n}(1) = \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Αν r η απόσταση από την αρχή O του κινητού, τότε η γωνία θ που έχει διανύσει πρέπει να είναι ανάλογη του r.

πχ


(1)



Η απόσταση r από την αρχή ενός σημείου A και η προσανατολισμένη γωνία θ (από τον $x'x$ να φτάσω στο σημείο μου) του άξονα των x με την OA λέγονται πολικές συντεταγμένες συντεταγμένες του σημείου

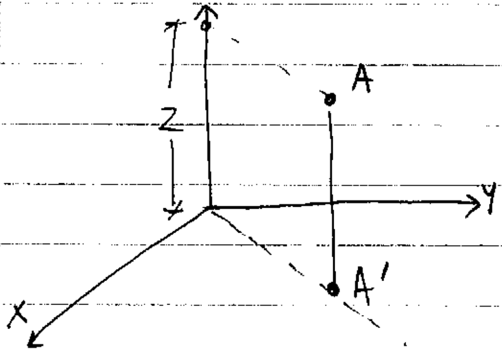
> Αν ξέρουμε τις πολικές r, θ ενός σημείου βρίσκουμε $\boxed{x = r\cdot\cos\theta}$ $\boxed{y = r\cdot\sin\theta}$

Για την καμπύλη (1) θέτω αυθαίρετα $\theta = t$

$r = a\theta = at$ άρα μια παραμετρικοποίηση του (1) θα είναι η $x(t) = at\cdot\cos t$

$y(t) = at\cdot\sin t$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Αν $A \in \mathbb{R}^3$, έστω A' η προβολή του A στο xOy και έστω (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες του A' στον xOy είναι δοσμένα τα (r, θ, z) μπορούμε να προσδιορίσουμε μοναδικά το A. Η τριάδα (r, θ, z) λέγονται κυλινδρικές συντεταγμένες του A.

Οι σχέσεις τους με τις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\boxed{x = r \cdot \cos\theta}$$

$$\boxed{y = r \cdot \sin\theta}$$

$$\boxed{z = z}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδείξουμε μ'επαγωγή οτι για να διαλέξω και να διατάξω $\underline{k}$ από τα $\underline{n}$ έχω $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Κάνουμε επαγωγή στο k:

ΒΑΣΗ: για $k=1$ έχω n τρόπους που συμφωνεί με τον τύπο.

ΥΠΟΘΕΣΗ: Ο τύπος ισχύει για το k.

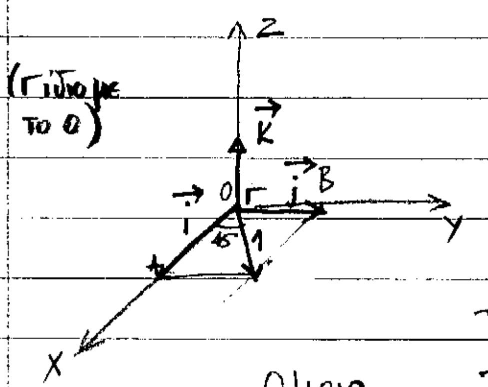
ΒΗΜΑ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ: Για να διαλέξω $k+1$ από τα n και να τα διατάξω, αρκεί να διαλέξω k και να τα διατάξω και μετα να διαλέξω άλλο ένα και να το βάλω στην $k+1$ θέση (Υποθέτουμε $k+1 \leq n$) και να τα βάλω στη σειρά

Για να διαλέξω k έχω $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ τρόπους
Μου μένουν $n-k$, άρα $n-k$ τρόπους για να διαλέξω το τελευταίο

ΑΡΑ οι συνολικοί τρόποι είναι $n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot(n-k) =$
$= n(n-1)\cdot(n-k+1)\cdot(n-(k+1)+1)$

ΑΣΚΗΣΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΤΑΝ ΣΤΡΙΒΟΥΜΕ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΩΝ Z 45° ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$



$OA = 1\cdot\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$OB = 1\cdot\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$O\Gamma = 0$

Αν T είναι η απεικόνιση τότε

$T(\vec{i}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Ομοια $T(\vec{j}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$T(\vec{k}) = (0,0,1)$

Αρα ο πίνακας του T είναι $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Α.Κ. Α.Κ.² [redacted]

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \cdot x - \sqrt{2}/2\, y \\ \sqrt{2}/2\, x + \sqrt{2}/2\, y \\ z \end{bmatrix}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & & (-1)^{1+n} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n} \end{array} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} (n-1)\times(n-1) \\ \text{Αφαιρούμε την} \\ 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ 1^{\eta} \text{ στήλη} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} (n-1)\cdot(n-1) \\ \text{Αφαιρούμε την} \\ 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ 2^{\eta} \text{ στήλη} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \begin{vmatrix} (n-1)\times(n-1) \\ \text{Αφαιρούμε } 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ n^{\text{οστή}} \text{ στήλη} \end{vmatrix}$$

[redacted]

Α.Κ.