ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΗ (Πεπερασμένη)

Combinatorics

→ Προβλήματα Δυσκολου Μετρήματος.

Πρόβλημα 1

· Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα, όταν από έναν πληθυσμό n αντικειμένων διαλέξω k με επανατοποθέτηση.

Διαφορετικά:

· Ρίχνω ένα ζάρι με n έδρες k φορές και αναρωτιέμαι για τα δυνατά αποτελέσματα αυτού του πειράματος.
Αυτά θα είναι n^k

Αν υποθέσουμε ότι για k ρίψεις του (n-έδρου) ζαριού έχω n^k δυνατά αποτελέσματα, τότε, για καθ' ένα απ' αυτά στην $(k+1)$ φορά μπορεί να συνεχιστεί με n τρόπους
Άρα $n^k \cdot n = n^{k+1}$

Πρόβλημα 2

Με πόσους τρόπους μπορώ να διατάξω k αντικείμενα από τα n

Διαφορετικά:

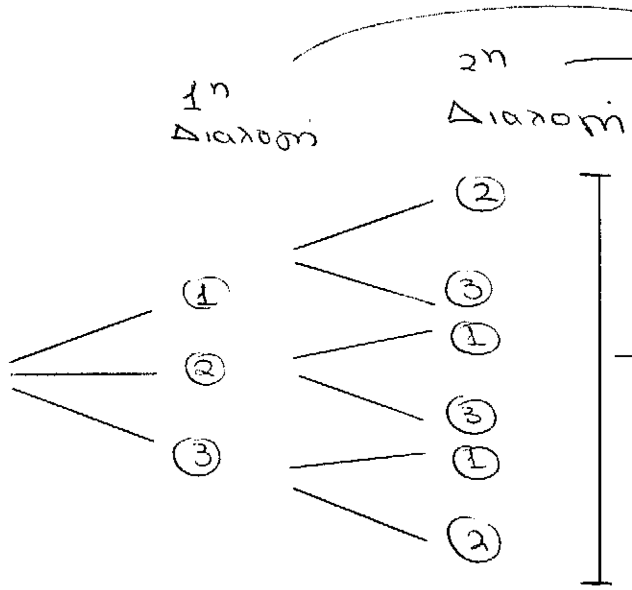
· Διαλέγω k λαχνούς στην σειρά, από ένα κουτί με n λαχνούς.

Για $n = 3$ και $k = 2$

Έστω ότι οι τρεις λαχνοί είναι οι εξής:

1 2 3

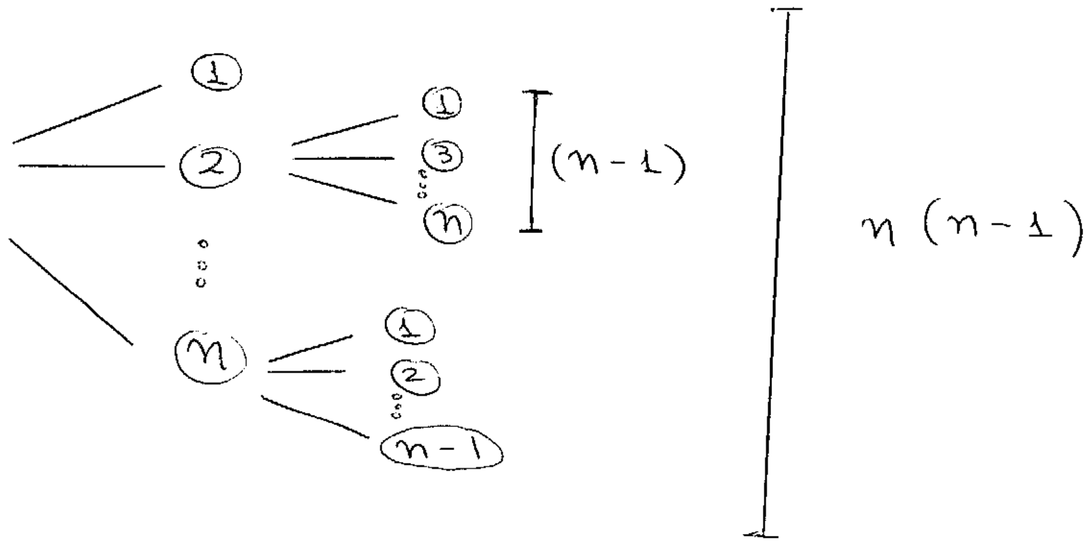
Τότε θα είναι:



Κάνω 2 διαλογές άρα έχω $k = 2$

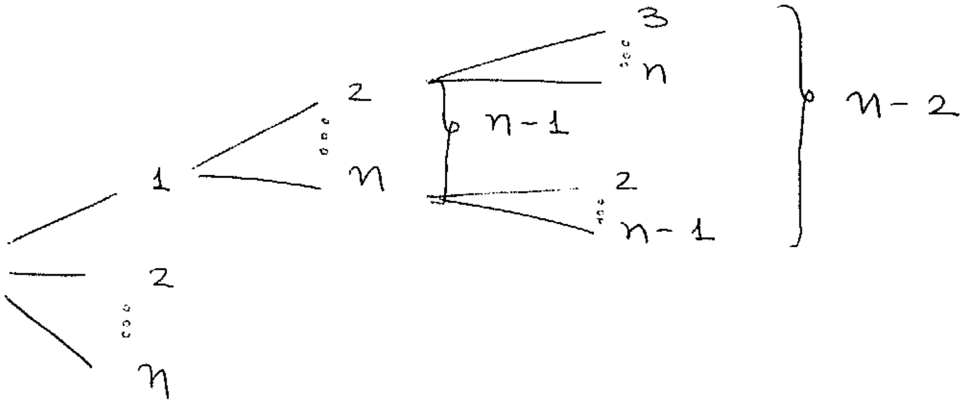
$3 \cdot 2 = 6$ τρόποι

Για γενικό n αλλά $k = 2$



Εικάζουμε ότι για $k=3$ ο τύπος γράφεται

$$n(n-1)\cdot(n-2)$$



<u>Γενικά</u>

$$n(n-1)\ldots(n-(k-1)) = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

Στην περίπτωση που $k=n$ ο τύπος γράφεται

$$n(n-1)\ldots\times 1 = \underbrace{n!}$$

↖ ν παραγοντικό

<u>Ορισμός</u>

Για $n=0,1,2\ldots$ ονομάζουμε η παραγοντικό και συμβολίζουμε με $n!$ τον αριθμό:

Παραδείγματα:

$0! = 1$ (Κενό γινόμενο)

$(n+1)! = n!\cdot(n+1)$

$1! = 0!\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1$

$2! = 1!\cdot 2 = 1\cdot 2 = 2$

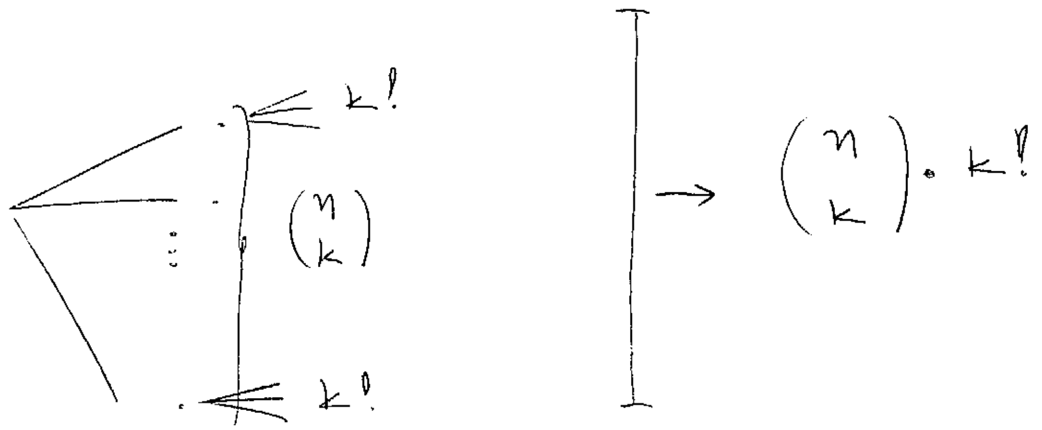
$3! = 2!\cdot 3 = 2\cdot 3 = 6$

Προβλημα 3

Με ποσους τροπους μπορουμε να διαλεξουμε k αντικειμενα απο τα n χωρις να ενδιαφερει η σειρα (Χαρακτηριστικο παραδειγμα = Λοτο)

Εστω $\binom{n}{k}$ η ανα k, αυτος ο αριθμος

<u>Υποδειξη</u>: Βαση τα $\binom{n}{k}$ προσπαθηστε να υπολογισετε απο την αρχη με ποσους τροπους μπορω να διαλεξω k αντικειμενα απο τα n στην σειρα.



Αρα

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$$= n(n-1)\ldots(n-k+1)\,\frac{(n-k)(n-k-1)\ldots 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Επομενως

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ισχυει $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Οι τροποι που μπορω να επιλεξω k απο τα n είναι το ίδιο με τους τροπους που θα διαλεξω τα n-k απο τα n

ή

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\Rightarrow$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \checkmark$$

Παράδειγμα:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Για να διαλέξω 2 από τα 3 και αυτά να τα βάλω στην σειρά, οι τρόποι είναι $3 \cdot 2 = 6$

Αν ήξερα πόσο είναι το $\binom{3}{2}$ θα υπολόγιζα

αυτούς τους τρόπους σαν $\binom{3}{2} \cdot 2$

Οι πιθανότητες να κερδίσει κανείς το Λόττο είναι:

$$\frac{1}{\binom{50}{6}} = \dots = \frac{1}{15.890.000}$$

Ερώτηση 1

Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω n αντικείμενα από τα n χωρίς σειρά

↳ Με έναν τρόπο

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Ερώτηση 2

Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω (χωρίς σειρά) 0 αντικείμενα από τα n

↳ Με έναν τρόπο

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ NEWTON

→ $(a+b)^2 = \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

→ $(a+b)^3 = \begin{matrix} a & a & a \\ b & b & b \end{matrix} = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

→ $(a+b)^n = \underbrace{\begin{matrix} a & a & \dots & a \\ b & b & \dots & b \end{matrix}}_{n}$

Θεωρω σύνολο $T_n = \{1, 2, \dots, n\}$
Εστω $\forall S \subseteq T_n$ συμβολίζω με $\# S$ τον αριθμο των στοιχειων του S

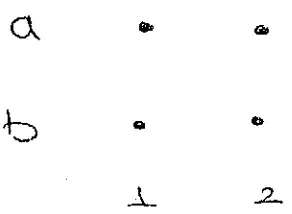
Για την διαδρομή για την οποία διαλεγω τα b μεσα απο το S και τα a απο το $T_n - S$, θα εμφανιστεί το γινομενο

$$a^{\#(T_n - S)} \cdot b^{\# S}$$

Αρα

$$(a+b)^n = \sum_{S \subseteq T_n} a^{\# S} \cdot b^{\#(T_n - S)}$$

Παραδειγμα



Αν $S \subseteq \{1,2\}$ και $T_2 = \{1,2\}$ τοτε

εχω τις εξης πιθανοτητες:

1η περιπτωση $S = \emptyset$

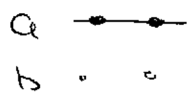
2η περιπτωση $S = \{1\}$

3η περιπτωση $S = \{2,\}$

4η περιπτωση $S = \{1,2\}$

↳ Στην 1η περιπτωση καταλαβαινω οτι η διαδρομη δεν περιλαμβανει το b αλλα εχω μονο διαδρομη στο a αρα

$a^2 = a^{\# T_2 - S} \cdot b^{\# S}$



2η περιπτωση $b \cdot a = b^{\# S} \cdot a^{\# T_2 - S}$

3η —//— $a\,b = b^{\# S} \cdot a^{\# T_2 - S}$

4η —//— $b^2 = b^{\# S} \cdot a^{\# T_2 - S}$

Διαλέγω $k \leq n$

Για πόσα $S \subseteq T_n$ $\# S = k$

$$\binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Άρα $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

ΔΙΩΝΥΜΟ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

$$\rightarrow (a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ φορες}}$$

Βασικο γινόμενο ειναι ενα απο a και b που σχηματιζεται, διαλεγοντας απο την καθε παρενθεση a ή b για να συμμετεχει στο γινομενο δηλαδή ειναι ενα γινομενο της μορφης $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ όπου τα $\varepsilon_i = a$ ή b ειναι ακριβως το στοιχείο που εχω διαλεξει απο την i παρενθεση

Θα θεωρησουμε γνωστο οτι

$$(a+b)^n = \sum \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \quad \text{οπου } \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \text{ ειναι ενα βασικο γινομενο}\}$$

Ενα βασικο γινομενο μπορει να ταυτιστει σαν πληροφορια με ενα υποσυνολο τα συνολα $T_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Αρα μπορω να γραψω οτι

$$(a+b)^n = \sum_{S \subseteq T_n} \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n : \varepsilon_i = a \Longleftrightarrow i \notin S \ \& \ \varepsilon_i = b \Longleftrightarrow i \in S\}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^2 = \binom{n=2}{0} a^2 b^0 + \binom{n=2}{1} a^1 b^1 + \binom{n=2}{2} a^0 b^2 =$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!} a^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!} ab + \frac{2!}{2!\,(2-2)!} b^2 =$$

$$= 1 a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$