ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ορισμός: Μια ορίζουσα $n \times n$ είναι μια <u>απεικόνιση</u> n^2 — $n \cdot n$ (πραγματικών) αριθμών σε <u>έναν πραγματικό αριθμό</u>.

Η <u>ορίζουσα</u> ενός συνόλου Α <u>συμβολίζεται</u> ως $|A|$ ή $\det A$ (από το αγγλικό determinant)

- Ορίζουσα 1×1

Έστω στοιχείο $\alpha \in \mathbb{R}$, η ορίζουσα $|\alpha| = \alpha$

- Ορίζουσα 2×2

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ορίζουσες των συνόλων που έχουν διαγωνίως αντεστραμμένα στοιχεία είναι <u>ίσες</u>.

π.χ. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}$

- Ορίζουσα 3×3

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Θεωρούμε πρόσημα $A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Για να θεωρήσουμε τα <u>πρόσημα</u> των στοιχείων του συνόλου αρχίζουμε από το <u>πρώτο</u> (πάνω-αριστερά) <u>στοιχείο</u> με <u>θετικό</u> πρόσημο. Από εκεί βάζουμε τα <u>πρόσημα εναλλάξ</u> στην πρώτη σειρά και στήλη και έπειτα εναλλάξ στους υπόλοιπους όρους.

<u>Σημείωση:</u> Μαθηματικά, το <u>πρόσημο</u> του στοιχείου a_{ij} του συνόλου προσδιορίζεται από τον παράγοντα $\underline{(-1)^{i+j}}$ οπότε προκύπτει ότι για το πρώτο στοιχείο του συνόλου a_{11} το πρόσημο είναι $(-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$ άρα θετικό

Προχωρούμε στις πράξεις των στοιχείων:

Ξεκινόντας από την πρώτη σειρά για ευκολία:

1) Θυμόμαστε τα πρόσημα:

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) Πολλαπλασιάζουμε το a_{11} (με το πρόσημό του) με την ορίζουσα 2×2 που θα προκύψει αν αγνοήσουμε τη σειρά και τη στήλη όπου βρίσκεται το a_{11} δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

και προκύπτει ο όρος $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3) Ομοίως για το a_{12}

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

και προκύπτει ο όρος $-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

4) Ομοίως για το a_{13}

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

και προκύπτει ο όρος $a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

5) Τέλος, προσθέτουμε τους όρους που βρήκαμε με τα πρόσημά τους

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

και λύνουμε τις ορίζουσες 2×2 όπως δείξαμε παραπάνω και λύσαμε την ορίζουσα 3×3

Σημείωση: Όταν επιλέγουμε σειρά ή στήλη αναφοράς (στο παράδειγμα η πρώτη σειρά) φροντίζουμε να είναι αυτή που θα μας οδηγήσει στο αποτέλεσμα γρηγορότερα και ευκολότερα. Ειδικά όταν έχουμε αριθμούς επιλέγουμε τη σειρά ή τη στήλη με τα περισσότερα 0 ώστε να μηδενιστούν οι περισσότεροι όροι

- Ορίζουσες 4x4 και πάνω

Ακολουθούμε την ίδια λογική με τις ορίζουσες 3x3 και περιμένουμε σε κάθε βήμα που κάνουμε να προκύπτει η αμέσως μικρότερη ορίζουσα

π.χ. Αν έχουμε μια ορίζουσα 4x4 μετά από την πρώτη διαδικασία περιμένουμε να εμφανιστούν 4 ορίζουσες 3x3 και μετά από κάθε 3x3 θα εμφανιστούν 3 ορίζουσες 2x2 (συνολικά 12 ορίζουσες 2x2) και μετά λύνουμε.

Κανόνας Sarrus

Λειτουργεί για όλες τις ορίζουσες 3x3 και συντομεύει ιδιαίτερα τις πράξεις

Έχουμε $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Για να υπολογίσουμε με τον κανόνα Sarrus την ορίζουσα:

1) Φτιάχνουμε έναν εκτεταμένο πίνακα αντιγράφοντα

τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα δεξιά του

$$\left|\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array}\left[\begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\right| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}$$

2) Βάζουμε πρόσημα ως εξής

$$\overset{+}{a_{11}} \quad \overset{+}{a_{12}} \quad \overset{+-}{a_{13}} \quad \overset{-}{a_{12}} \quad \overset{-}{a_{13}}$$

3) Πολλαπλασιάζουμε διαγώνια τα στοιχεία διατηρώντας το πρόσημο που βάλαμε από πάνω κατά αυτόν τον τρόπο:

$$\left|\begin{array}{ccc} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+-}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} \overset{-}{a_{12}} & \overset{-}{a_{13}} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}$$

και έχουμε τους όρους

$$\begin{array}{ll} a_{11}a_{22}a_{33} & -a_{13}a_{22}a_{31} \\ a_{12}a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{23}a_{32} \\ a_{13}a_{22}a_{33} & -a_{13}a_{22}a_{33} \end{array}$$

4) Προσθέτουμε τους παραπάνω όρους με τα πρόσημά τους:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$- a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33}$$

Αναδρομικός ορισμός: (βλ. αναδρομή)

Γενικά η ορίζουσα γράφεται:

$$|(a_{ij})|_{i=1,j=1}^{n\ \ n} = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

↳ ορίζουσα $n \times n$

$$= (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

→ ορίζουσες $(n-1)\times(n-1)$

$$+ (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΗ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Οι <u>αναδρομικοί</u> τύποι μας χρειάζονται στα Μαθηματικά για να <u>γενικεύσουμε</u> και να <u>ορίσουμε</u> προτάσεις και ισχυρισμούς.

<u>π.χ.</u> Έστω ότι έχουμε το άθροισμα

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

Προκύπτει λογικά ότι το άθροισμα αυτό ορίζεται αναδρομικά:

$$S = \frac{n}{2}(n+1)$$

γιατί ταιριάζοντας τους όρους ανά δύο συμμετρικά (τον πρώτο με τον τελευταίο $(1+n)$, τον δεύτερο με τον προτελευταίο $(2+n-1=1+n)$, κ.ο.κ.) προκύπτει ότι έχουμε $\frac{n}{2}$ φορές τον όρο $n+1$

Η γενίκευση αυτών των ορισμών γίνεται μέσω της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής, με την οποία αποδεικνύουμε ότι η πρόταση P ισχύει για το $n+1$ αν ισχύει για κάποιον εύκολο αριθμό (π.χ. 1) και για το n. (Ονομάζεται αλλιώς και μέθοδος ντόμινο)

Για το παραπάνω παράδειγμα έχουμε:

1) Αποδεικνύω για το 1 ότι $P(1): 1 = \frac{1}{2}\cdot(1+1) \Leftrightarrow 1=1$

που ισχύει.

2) Δέχομαι ότι $P(n): 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n}{2}(n+1)$

3) Για να αποδείξω την αλήθεια του $P(n+1)$ αρκεί: $\underbrace{1+2+3+\ldots+(n-1)+n}_{P(n)}+(n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2)$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}(n+1) + (n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)\cdot\frac{n+2}{2} = \frac{n+1}{2}(n+2)$$ που ισχύει

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ένα <u>διάνυσμα</u> είναι ένα <u>προσανατολισμένο</u> στο χώρο <u>ευθύγραμμο τμήμα</u>. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο έχουμε το δικαίωμα να το <u>μεταφέρουμε</u> με την αρχή του να βρίσκεται στην <u>αρχή των αξόνων.</u>

Έστω ότι έχουμε ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$ δηλαδή θα έχει <u>συντεταγμένες</u> της μορφής <u>(a,b)</u> με $a,b \in \mathbb{R}$. Έτσι το $\vec{\delta}=(x,y)$ έχει επίσης τέτοιες συντεταγμένες $\vec{\delta} = \big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big)$ που πιο απλά γράφονται $\vec{\delta} = (a,b)$ όπου $\underline{a = a_2 - a_1}$ και $\underline{b = b_2 - b_1}$

Έστω τρία σημεία $A(0,0)$, $B(a_1,a_2)$, $\Gamma(a_3,a_4)$ και τα διανύσματα $\vec{AB} = (a_1,a_2)$ και $\vec{A\Gamma} = (a_3,a_4)$. Αποδεικνύεται ότι $\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{matrix} \right\| = |a_1a_4 - a_2a_3| = E_{\text{παραλλ.}}$