Πίνακες — Γραμμικές Απεικονίσεις

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Ένας πίνακας $n \times m$ είναι $n \cdot m$ στοιχεία (πραγματικοί αριθμοί)

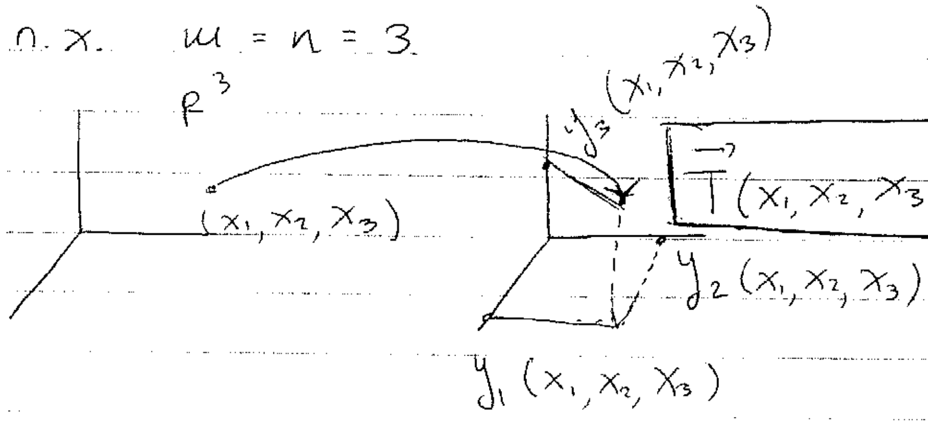
$$(a_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

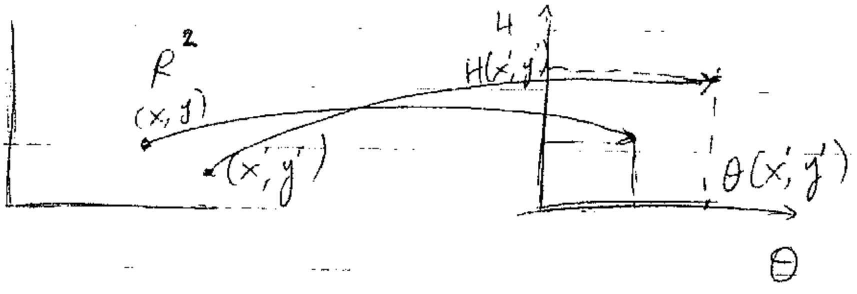
$$T(x_1, \dots, x_m) = \big(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big)$$

π.χ. $m = n = 3$



$$\boxed{\vec{T}(x_1, x_2, x_3) = \begin{matrix} y_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3(x_1, x_2, x_3) \end{matrix}}$$

Παράδειγμα: Σε κάθε σημείο ενός επιπέδου αντιστοιχούμε τη υγρασία και τη θερμοκρασία του σημείου.



Αντιστοιχίζονται τα σημεία μ.ε τη υγρασία και τη θερμοκρασία τους (δεν έχει γεωμετρική σχέση)

2ο Μάθημα

13/11/2018

Πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{,\, j=1}^{n}$

$= (a_{ij})_{\dots}$

Συναρτήσεις: $\vec{f} : R^m \to R^n$

$\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$

Για $\vec{x} \in R^m$ $\quad \vec{f}(\vec{x}) \in R^n$ Άρα έχει n συντεταγμένες: τις $f_1, f_2, \dots, f_n$

$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1, f_2, \dots, f_n) \to (f(\vec{x})_1, f(\vec{x})_2, \dots, f(\vec{x})_n)$

$\vec{f}(\vec{y}) = (f_1', \dots, f_n')$

έχω:

$f_i : R^m \to R \qquad 1 \le i \le n$

τε για $\vec{x} \in R^m$ υπάρχει $\vec{f}(x) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$

$\vec{f}(x : R^m \to R^n$

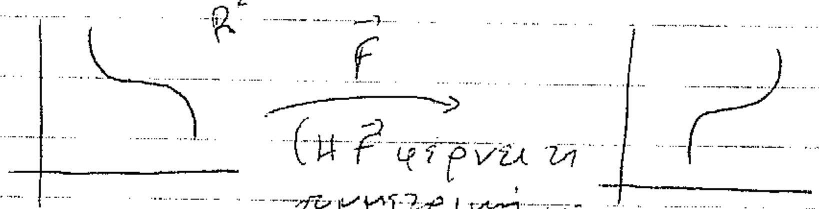
$f: R^1 \to R^1$ Το βλέπω στον R^2

$\vec{F}: R^m \to R^n$ Το βλέπω στον R^{m+n}
Αν $m + n > 4$ δεν μπορώ να το αναπαραστήσω)

<u>Πρόταση</u>: Μια συνάρτηση $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n): R^m \to R^n$ είναι συνεχής αν και μόνο αν οι $f_1, \dots, f_n$ είναι συνεχείς και είναι παραγωγίσιμη αν και μόνο αν οι $f_1, \dots, f_n$ είναι παραγωγίσιμες

Μας ενδιαφέρουν οι συναρτήσεις $\vec{F}: R^m \to R^n$ οι οποίες διατηρούν τις αναλογίες

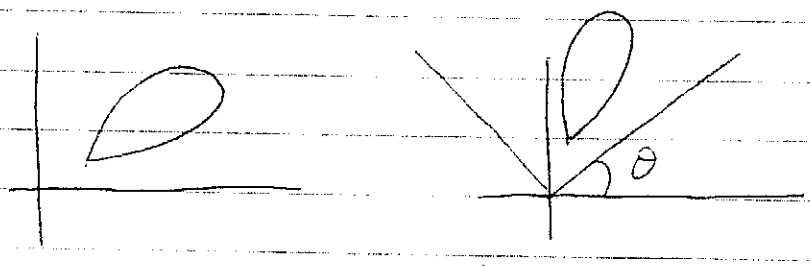
Πχ 1



(Η $\vec{F}$ φέρνει τη συμμετρική ως προς τον κάθετο άξονα)

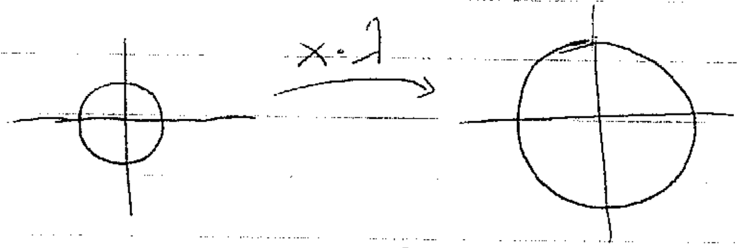
$\Rightarrow$ Διατηρεί τις αποστάσεις, άρα διατηρεί και τις αναλογίες

Πχ 2
στροφή



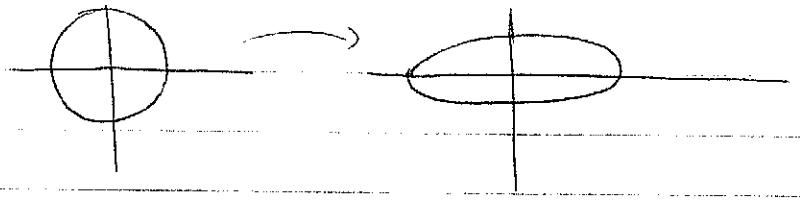
(Στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων)

Πχ 3 Μεγέθυνση



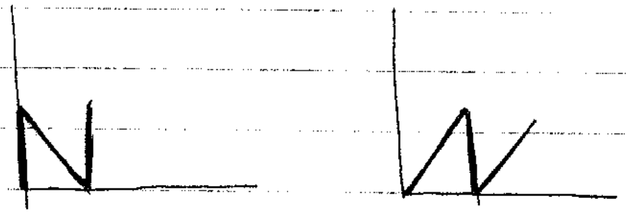
Εδώ δεν διατηρούνται οι αναλογίες

Πx 4



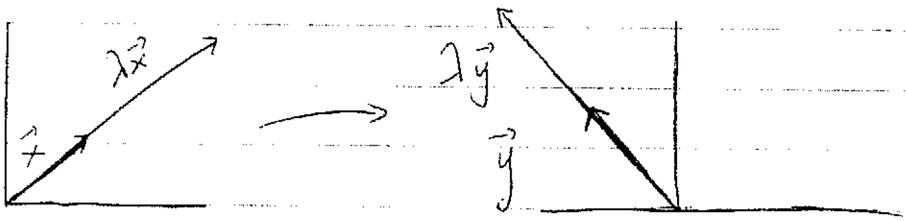
Το νέο σχήμα έχει διαφορετικές αναλογίες από το αρχικό

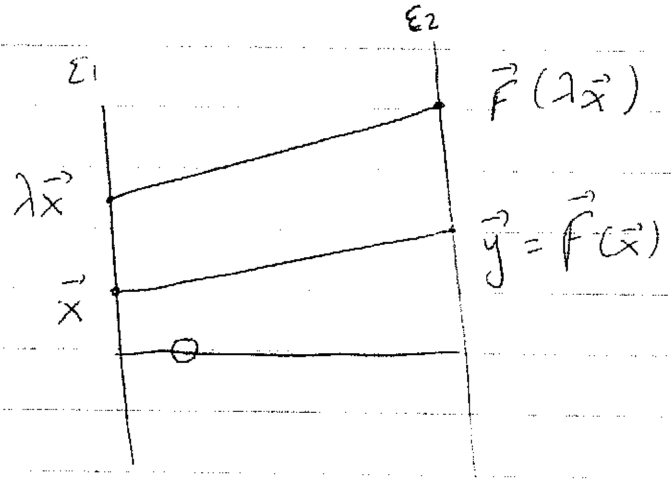
Πx 5



Πάντα διατηρούνται οι αναλογίες με κάποιο τρόπο

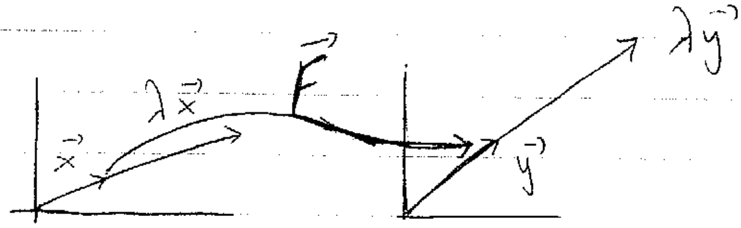
• Τι εννοούμε "διατηρεί αναλογίες";





$\vec{F} : R^m \longrightarrow R^n$

$m = 2$



Ορισμός: Γραμμική συνάρτηση $\vec{f}: R^n \to R^m$ είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

$$\vec{f}(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{f}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in R^n$$

$$\vec{f}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y})$$

Με αυτόν τον ορισμό μπορεί να αποδείξει κανείς ότι: για κάθε γραμμική συνάρτηση $\vec{f}: R^n \to R^m$ υπάρχει πίνακας $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^{n, \nu}$ ώστε

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$(\underbrace{a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n}_{1^{\eta} \text{ συντεταγμένη}},$$

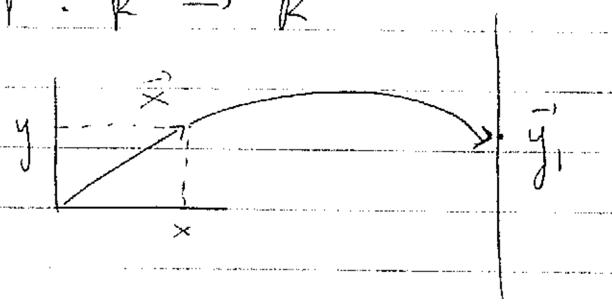
$$\underbrace{a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} x_n}_{2^{\eta} \text{ συντεταγμένη}}, \ldots$$

$$\ldots \underbrace{a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n}_{\text{για } m / n\text{-οστή συντεταγμένη}})$$

πχ $f: R \to R$

$f(x) = \lambda(x)$, $\lambda = a_{11}$ (έχω μόνο ένα x)

$f: R^2 \to R$

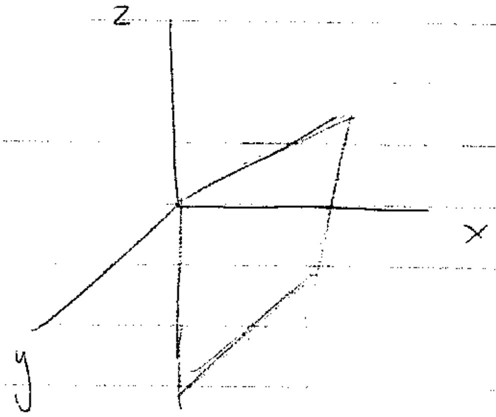


* Επειδή θα έχω μόνο a_{11}, a_{12} μπορώ να τα γράψω a, b

$f((x,y))$ (ή γράφω απλά $f(x,y)$)

$$\boxed{f(x,y) = a\cdot x + b\cdot y}$$

$$z = ax + by$$
$$\Leftrightarrow -ax - by + z = 0$$
$$\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z = \Delta \quad , \quad \Delta = 0$$



Σχηματίζεται ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων (το οποίο δεν γίνεται να είναι κατακόρυφο γιατί τότε δεν είναι συνάρτηση)

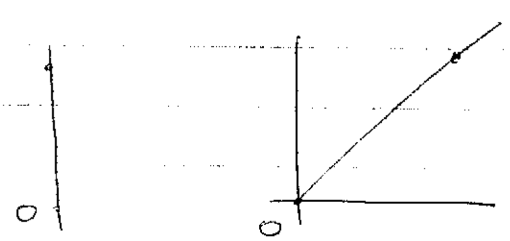
$f: R \to R^2 \qquad \vec{x}: R \to R^2$

Αν η f είναι γραμμική $\vec{f}: R \to R^2$ $\exists\, a, b$

$\vec{f}(t) = (at, bt)$

$\vec{f}\,'(t) = (a, b)$

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x}$$

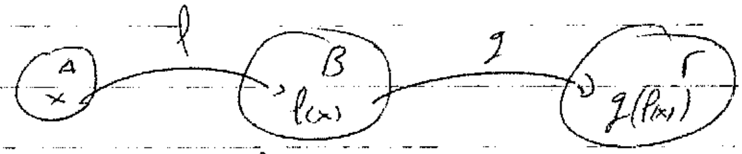


7ο Μάθημα

Άσκηση: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική 20/11/2018

$S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ γραμμική

1) Ορίζεται η $S \circ T$?
2) Η $S \circ T$ είναι γραμμική ?



$f: A \to B$ $g: B \to \Gamma$

Λύση

1) Η $S \circ T$ ορίζεται: $S \circ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

2) Για να είναι η $S \circ T$ γραμμική, αρκεί να τηρεί τις δύο συνθήκες:

Από τον ορισμό: Η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ είναι γραμμική αν
1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$

οπότε:

$- S \circ T(\lambda x) = S(T(\lambda x)) = S(\lambda T(x))$ (γιατί η T είναι γραμμική)

$= \lambda \cdot S(T(x))$ (γιατί η S είναι γραμμική)

$= \lambda\, S \circ T(x)$

$- S \circ T(x+y) = S(T(x+y)) = S(T(x) + T(y))$

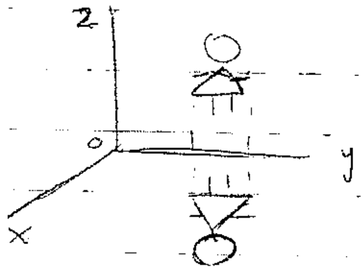
$= S(T(x)) + S(T(y)) = S \circ T(x) + S \circ T(y)$

$\Rightarrow$ Επομένως η $S \circ T$ είναι γραμμική

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε μια γραμμική συνάρτηση
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

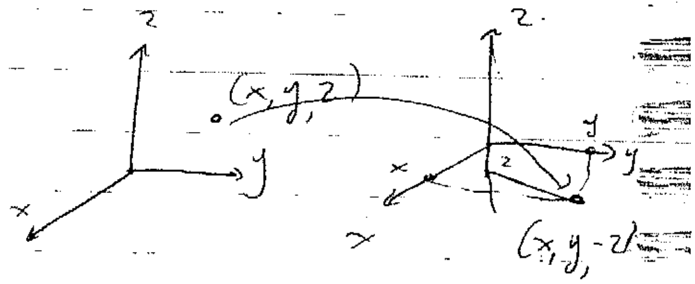
Παράδειγμα:

Θέλουμε να βρούμε τη γραμμική συνάρτηση της συμμετρίας ως προς xOy



$T(x, y, z) = (x, y, -z)$

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$T = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$

$\ell_1(x, y, z) = x$

$\ell_2(x, y, z) = y$

$\ell_3(x, y, z) = -z$

Υπενθύμιση: Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική τότε υπάρχει $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}$ ώστε

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

Ξέρουμε ότι $T(\vec{i}) = \vec{i}$, $T(\vec{j}) = \vec{j}$, $T(\vec{k}) = -\vec{k}$

$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$

$T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$ και T γραμμική

Έστω $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}$ ο πίνακας της T

Τότε: $$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

Άρα $$\overset{(T(\vec{i}))}{T(\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{0})} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(T(\vec{j}))}{T(0, 1, 0)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

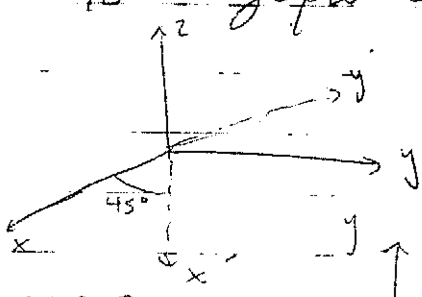
$$\overset{(T(\vec{k}))}{T(0, 0, 1)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Οπότε } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Άρα $$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{bmatrix} = (x_1, x_2, -$$

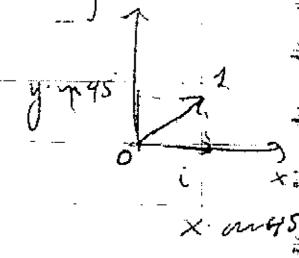
* $T(x, y, z) = (x+y, y+z, z+x) \rightarrow$ είναι γραμμική γιατί έχει μεταβλητές $1^{ου}$ βαθμού και δεν έχει σταθερό όρο

Βρείτε τον πίνακα της στροφής 45° γύρω από τον άξονα των z



$$\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$$

Το $\vec{i} = (1,0,0)$ πηγαίνει στο διάνυσμα $\hookrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$



$$T(1,0,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$T(0,1,0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$T(0,0,1) = (0,0,1)$ γιατί δεν περιστρέφεται κατά x

όπου T η απεικόνιση

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

- $T(1,0,0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
- $T(0,1,0) = (a_{12}, a_{22}, a_{23}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
- $T(0,0,1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (0,0,1)$

οπότε $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

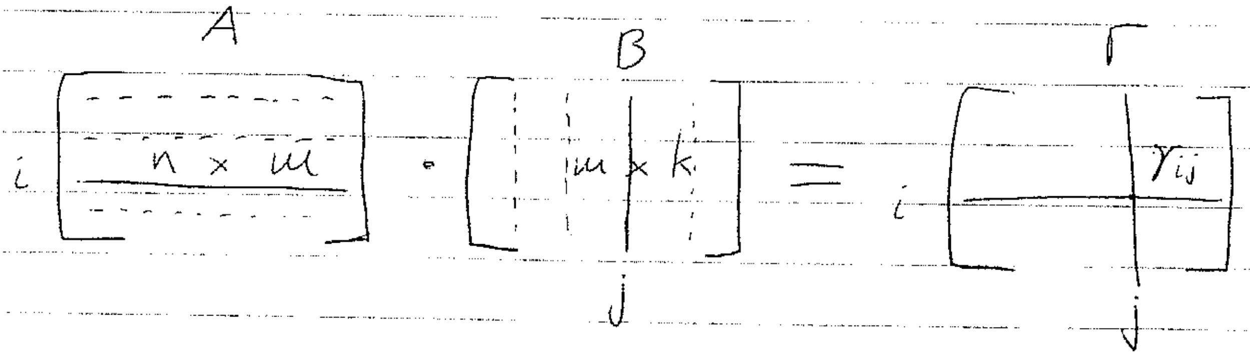
$A = \left[a_{ij} \right]_{i,j}$ $\quad n \times m$

$B = \left[b_{lk} \right]_{l,k}$ $\quad l \times k$

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ ορίζεται <u>αν και μόνο αν</u> $\boxed{m = l}$

<u>Θυμάμαι</u>: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Εσωτερικό γινόμενο: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$



Πχ
$$\underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}} \cdot \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot u + b \cdot w & a v + b \cdot z \\ \gamma \cdot u + \delta \cdot w & \gamma \cdot v + \delta \cdot z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 3$

Άρα προκύπτει πίνακας 3×3

$$\begin{bmatrix} (1\cdot 1 + 2\cdot 3) & (1\cdot 2 + 2\cdot 2) & (1\cdot 3 + 2\cdot 1) \\ (2\cdot 1 + 1\cdot 3) & (2\cdot 2 + 1\cdot 2) & (2\cdot 3 + 1\cdot 1) \\ (3\cdot 1 + 3\cdot 0) & (3\cdot 2 + 0\cdot 2) & (3\cdot 3 + 0\cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 2+4 & 3+2 \\ 5 & 4+2 & 6+1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (A) $\qquad S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (B) (ίδιο γραμμικ. συναρτήσεις)

$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ → ποιος πίνακας αντιστοιχεί στη σύνθεση $S \circ T$;

Είναι ο $A \cdot B$ με διάσταση $n \cdot k$

Ταυτοτική απεικόνιση $id_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$id_n(\vec{x}) = \vec{x}$ → είναι γραμμική (ομοιόμορφη μεταβολή)

$= \left(l_1(\vec{x}), l_2(\vec{x}), \ldots, l_n(\vec{x}) \right)$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \left(l_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, l_n(x_1, \ldots, x_n) \right)$

δηλαδή $l_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$